Horizontalkreis durch Kristalle in Cirruswolken

Alexander Haußmann, April 2018

Herleitungen

Abweichung von idealem Ring mit konstantem Höhenwinkel durch zunehmende Verkippung der Kristallachsen, je weiter entfernt sich die Kristalle vom Beobachter befinden. In "normalen" Halosimulationsprogrammen nicht enthalten!

Annahme: Kristalle halten sich auf Kugelschale um kugelförmige Erde auf, Refraktion vernachlässigt (Lichtausbreitung entlang von Geraden), keine Tilts (perfekte Ausrichtung)

Gesucht ist Funktion $h_{HB}(\alpha_{HB})$, die den Höhenwinkel des Horizontalkreises in Abhängigkeit vom Azimut (d.h. der Himmelsrichtung) für die Ansicht des Beobachters beschreibt

 h_{SB} : Sonnenhöhe beim Beobachter

 h_{SK} : Sonnenhöhe für Kristall (bezogen auf dessen gegenüber dem Beobachter verkippte Achse)

 h_{HB} : Höhe des Horizontalkreises beim Beobachter

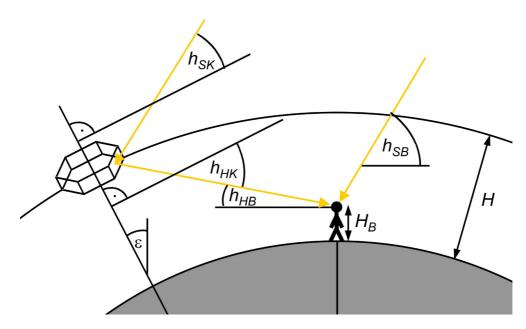
 h_{HK} : Höhe des Horizontalkreises am Kristall (d.h. Höhenwinkel des reflektierten Strahls bezogen auf verkippte Kristallachse)

 α_{HB} : Azimut des Horizontalkreises beim Beobachter, bezogen auf Sonne (dort $\alpha_{HB} = 0$)

R: Erdradius

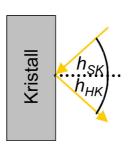
 H_R : Beobachterhöhe

H: Höhe der Kristallschicht



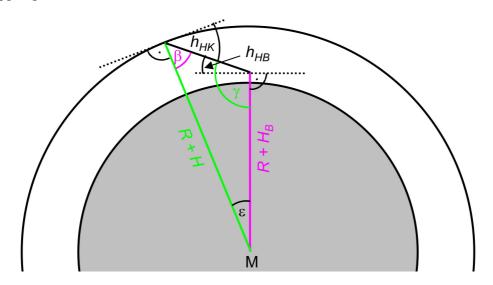
1) Eigenschaft der Haloart (verknüpft am Kristall lokal vorliegende Größen):

 $h_{HK} = h_{SK}$ (Reflexionsgesetz)



Anm.: für andere Haloarten gelten andere Beziehungen, z. B. für den ZHB: $\sin^2 h_{SK} + \cos^2 h_{ZK} = n^2$

2) Verkippungswinkel



Sinussatz:

$$\frac{\sin \beta}{R + H_B} = \frac{\sin \gamma}{R + H}$$

$$\beta = 90^{\circ} - h_{HK} \rightarrow \sin \beta = \cos h_{HK}$$
$$\gamma = 90^{\circ} + h_{HK} \rightarrow \sin \gamma = \cos h_{HB}$$

$$\frac{\cos h_{HK}}{\cos h_{HB}} = \frac{R + H_B}{R + H} =: q$$

Innenwinkelsumme:

$$\beta + \gamma + \varepsilon = 180^{\circ}$$

$$\rightarrow \varepsilon = h_{HK} - h_{HB}$$

Das gilt unabhängig vom Azimut $\alpha_{{\it HB}}$!

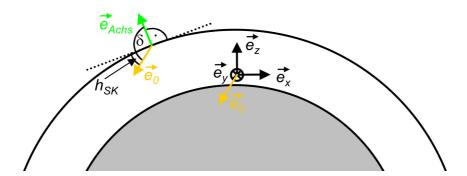
3) Sonnenhöhe am Kristall

Koordinatensystem:

z: vertikale Richtung beim Beobachter

x: Richtung beim Beobachter zum Schnittpunkt von Sonnenvertikal und Horizont

y: horizontale Richtung beim Beobachter "links quer" zur Sonne



Damit ist der Einheitsvektor des einfallenden Sonnenlichtes:

$$\vec{e}_0 = \begin{pmatrix} -\cos h_{SB} \\ 0 \\ -\sin h_{SB} \end{pmatrix}$$

(in "Flugrichtung der Photonen", Blickrichtung zur Sonne hin ist der entgegengesetzte Vektor!)

Diese vektorielle Richtung beschreibt auch den Lichteinfall am Kristall (paralleles Sonnenlicht!)

Die für den Kristall lokal vertikale Richtung (also die verkippte Achse) lässt sich als Kugelkoordinaten-Einheitsvektor zusammen"basteln":

$$\vec{e}_{Achs} = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha_{HB} \\ \sin \varepsilon \cdot \sin \alpha_{HB} \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix}$$

Die z-Komponente gibt unmittelbar den Neigungswinkel wieder (Skalarprodukt). x und y stellen vom Vorzeichen her sicher, dass sich die Achsen immer radial nach außen neigen.

Die Sonnenhöhe am Kristall ergibt sich aus dem Skalarprodukt dieser beiden Vektoren:

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_{Achs} = \cos \delta = -\sin h_{SK}$$

$$\rightarrow \sin h_{SK} = \sin \varepsilon \cos \alpha_{HB} \cos h_{SB} + \cos \varepsilon \sin h_{SB}$$

4) Kombination

Zunächst vier Gleichungen:

 $1) h_{HK} = h_{SK}$

$$2a) \qquad \frac{\cos h_{HK}}{\cos h_{HB}} = \frac{R + H_B}{R + H} = :q$$

- 2b) $\varepsilon = h_{HK} h_{HB}$
- 3) $\sin h_{SK} = \sin \varepsilon \cos \alpha_{HB} \cos h_{SB} + \cos \varepsilon \sin h_{SB}$

Anm: Es gilt stets $90^{\circ} \ge h_{HB} \ge \arccos q$, der Lichtweg zum Beobachter verlässt den Kristall immer "nach unten" bzgl. des "Kristallhorizonts".

Zusammengefasst auf zwei:

$$\cos h_{SK} = q \cdot \cos h_{HB}$$

$$\sin h_{SK} = \sin(h_{SK} - h_{HB})\cos \alpha_{HB} \cos h_{SR} + \cos(h_{SK} - h_{HB})\sin h_{SR}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Umkehrfunktion $\alpha_{HB}(h_{HB})$ einfacher ermittelt werden kann:

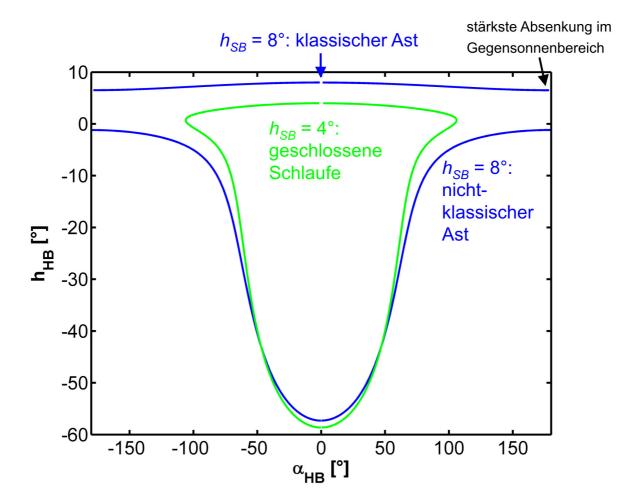
$$\cos \alpha_{HB} = \frac{\sin h_{SK} - \sin h_{SB} \cos(h_{SK} - h_{HB})}{\cos h_{SR} \sin(h_{SK} - h_{HB})}$$

mit Additionstheoremen und $\sin h_{SK} = \sqrt{1 - q^2 \cdot \cos^2 h_{HB}}$:

$$\cos \alpha_{HB} = \frac{\sqrt{1 - q^2 \cdot \cos^2 h_{HB}} - \sin h_{SB} \cdot \left(q \cdot \cos^2 h_{HB} + \sqrt{1 - q^2 \cdot \cos^2 h_{HB}} \cdot \sin h_{HB}\right)}{\cos h_{SB} \cdot \left(\sqrt{1 - q^2 \cdot \cos^2 h_{HB}} \cdot \cos h_{HB} - q \cdot \cos h_{HB} \cdot \sin h_{HB}\right)}$$

Lösungen existieren, wenn die rechte Seite Werte zwischen einschließlich -1 und +1 annimmt.

Beispiel: R = 6371 km, H = 10 km, $H_B = 0 \text{ km}$:



Diskussion

nutze Darstellung in zwei Gleichungen:

1)
$$\cos h_{SK} = q \cdot \cos h_{HR}$$

$$\sin h_{SK} = \sin(h_{SK} - h_{HB})\cos \alpha_{HB}\cos h_{SB} + \cos(h_{SK} - h_{HB})\sin h_{SB}$$

 $\alpha_{HB} = 0$: streifende Reflexion im Sonnenvertikal

damit: 2)
$$\sin h_{SK} = \sin(h_{SK} - h_{HB})\cos h_{SB} + \cos(h_{SK} - h_{HB})\sin h_{SB} = \sin(h_{SK} - h_{HB} + h_{SB})$$

Zwei Fälle:

a)
$$h_{SK} = h_{SK} - h_{HB} + h_{SB}$$

 $\rightarrow h_{HB} = h_{SB}$ klassischer Horizontalkreis, läuft immer durch Sonne!

b)
$$180^{\circ} - h_{SK} = h_{SK} - h_{HB} + h_{SB}$$

 $\rightarrow 2h_{SK} = 180^{\circ} + h_{HB} - h_{SB}$

Für $|h_{HB}|$ hinreichend groß und $q \approx 1$ gilt in "nullter Näherung": $h_{SK} \approx |h_{HB}|$ $\rightarrow 2|h_{HB}| \approx 180^\circ + h_{HB} - h_{SB}$ Interessant ist hier der Fall $-2h_{HB} = 180^{\circ} + h_{HB} - h_{SB}$:

$$h_{HB} \approx \frac{h_{SB}}{3} - 60^{\circ}$$

Das ist der Startpunkt für den zweiten, "nichtklassischen" Ast des Horizontalkreises bei sehr tiefen Beobachtungshöhen. Praktisch irrelevant, denn man bräuchte eine "frei durchsichtige Erde" um davon etwas zu sehen. Zudem sind die verantwortlichen Kristalle sehr viel weiter vom Beobachter entfernt als bei "normalen" Halos (Problem mit Extinktion).

$$\alpha_{HB} = 180^{\circ}$$
: Gegensonnenbereich

damit: 2)
$$\sin h_{SK} = -\sin(h_{SK} - h_{HB})\cos h_{SB} + \cos(h_{SK} - h_{HB})\sin h_{SB} = \sin(h_{SB} - h_{SK} + h_{HB})$$

daraus zunächst
$$h_{SK} = h_{SB} - h_{SK} + h_{HB}$$

 $\rightarrow 2h_{SK} = h_{SB} + h_{HB}$

Anm: Aus der alternativen Lösung $180^{\circ} - h_{SK} = h_{SB} - h_{SK} + h_{HB}$ folgt hier nichts Sinnvolles.

mit 1):
$$\cos\left(\frac{h_{SB} + h_{HB}}{2}\right) = q \cdot \cos h_{HB}$$

Damit kann man für vorgegebenem Sonnenstand beim Beobachter die Höhe des Horizontalkreises gegenüber der Sonne bestimmen, allerdings lässt sich diese Gleichung nur numerisch lösen, bzw. mittels Additionstheoremen in eine Gleichung 4. Grades überführen, oder man löst nach der Umkehrfunktion $h_{SB}(h_{HB})$ auf.

mit dem Verkippungswinkel der Kristallachsen $\varepsilon = h_{SK} - h_{HB} = \arccos(q \cdot \cos h_{HB}) - h_{HB}$ kann man auch schreiben:

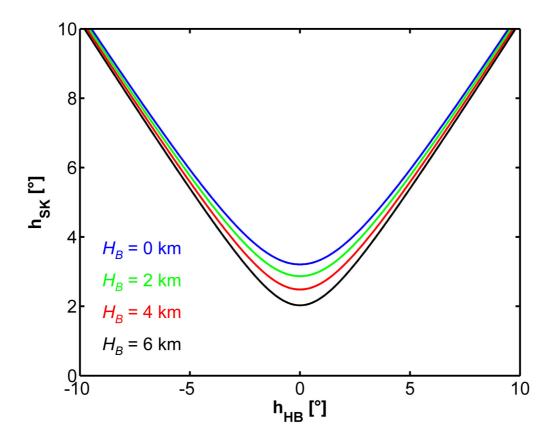
 $h_{SK} = h_{SB} - \varepsilon$ Sonnenhöhe am Kristall um ε niedriger als Sonnenstand beim Beobachter

 $h_{HB} = h_{SB} - 2\varepsilon$ Horizontalkreis an Gegensonne um 2ε tiefer als Sonnenstand beim Beobachter (plausibel wegen Reflexion)

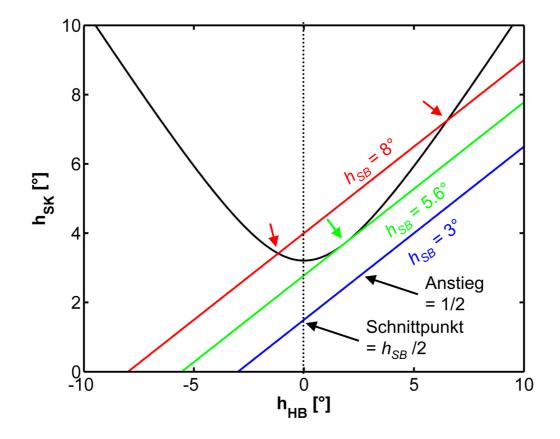
Für große h_{SB} geht $\varepsilon \to 0$, und damit $h_{HB} \approx h_{SK} \approx h_{SB}$.

Für eine tatsächliche Rechnung ist das aber nicht hilfreich, da ε selbst von h_{HB} abhängt. Zudem ist nicht gesichert, dass es immer nur genau eine Lösung (wenn überhaupt) gibt!

Anschauliche Betrachtung: Die Funktion $h_{SK}(h_{HB}) = \arccos(q \cdot \cos h_{HB})$ (bzw. allgemeiner, also für andere Haloarten brauchbar: $h_{HK}(h_{HB}) = \arccos(q \cdot \cos h_{HB})$) sieht typischerweise so aus (für $R = 6371 \,\mathrm{km}$, $H = 10 \,\mathrm{km}$):



mit $\frac{h_{HB}}{2} + \frac{h_{SB}}{2} = h_{SK}(h_{HB})$ lässt sich das Lösungsverhalten so veranschaulichen:



(für R = 6371 km, H = 10 km, $H_B = 0$ km. $h_{SB} = 5.6^{\circ}$ ist die kritische Höhe, ab der sich der Horizontalkreis abschnürt.)

Es gibt mit sinkendem Sonnenstand also entweder zwei, eine oder gar keine Lösungen. Zwei Lösungen entsprechen zwei getrennten Ästen des Horizontalkreises, einer davon der klassische Horizontalkreis (nun jedoch mit Absenkung gegenüber der Sonne) über dem Horizont, der andere, "nichtklassische", größtenteils unter dem Horizont. Keine Lösung bedeutet eine geschlossene Horizontalkreisschleife (leider stets teils oder völlig unter dem Horizont), die nicht mehr bis zum Gegenazimut der Sonne reicht. Genau eine Lösung entspricht dem Grenzfall.

Näherungslösung:

 $h_{SK}(h_{HB})$ lässt sich durch eine Hyperbel annähern:

$$h_{SK}(h_{HB}) \approx \sqrt{a^2 + h_{HB}^2}$$
 mit $a = \arccos q$

Für $q \approx 1$ stimmt diese Ersatzfunktion auch in der zweiten Ableitung "fast genau" mit dem Original überein.

daraus ergibt sich für die Lösungen:

$$h_{HB} \approx \frac{h_{SB}}{3} \pm 2\sqrt{\frac{h_{SB}^2}{9} - \frac{a^2}{3}}$$

Der kritische Sonnenstand, ab dem sich der Horizontalkreis schließt, ergibt sich in dieser Näherung durch Nullsetzen des Wurzelterms:

$$h_{SBkrit} \approx \sqrt{3} \cdot \arccos q$$

Dabei beträgt dann die Höhe des Horizontalkreises gegenüber der Sonne:

$$h_{HBkrit} \approx \frac{h_{SBkrit}}{3}$$

Beispiel:
$$R = 6371 \text{ km}$$
, $H = 10 \text{ km}$, $H_B = 0 \text{ km}$: $h_{SBkrit} = 5.6^{\circ}$, $h_{HBkrit} = 1.9^{\circ}$

Eine andere Näherung ist eine Taylorentwicklung des Arkuskosinus für $q \approx 1$:

$$h_{SK}(h_{HB}) \approx |h_{HB}| + \frac{1-q}{|\tan h_{HB}|}$$

Diese ist für große $\left|h_{{\it HB}}\right|$ präziser, divergiert aber bei $\left|h_{{\it HB}}\right|=0$.

Für die Praxis

Hier relevant und möglicherweise messbar ist der Absenkungseffekt des klassischen Horizontalkreisastes. Es gibt kaum Beobachtungen von Horizontalkreisen bei tiefem Sonnenstand in Cirrus (meist Eisnebelbeobachtungen, oder Flugzeug durch Cirrus), da dies räumlich große homogene Wolkenstrukturen voraussetzt.

Die stärkste Absenkung wird gegenüber der Sonne erwartet und beträgt näherungsweise:

$$\Delta h_{HB} \approx 2 \left(\frac{h_{SB}}{3} - \sqrt{\frac{h_{SB}^2}{9} - \frac{\left(\arccos q\right)^2}{3}} \right)$$

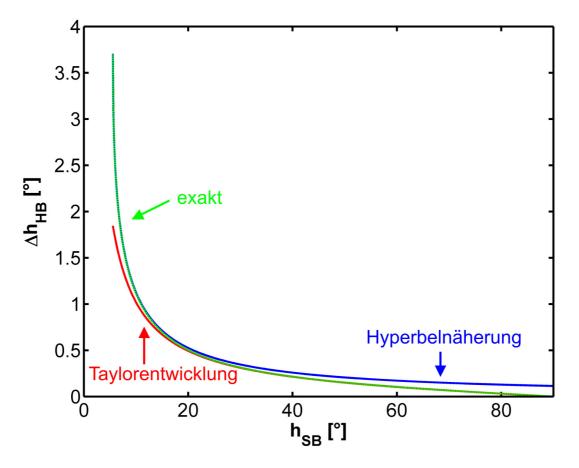
aus der Hyperbelnäherung für tiefe h_{SB}

oder

$$\Delta h_{HB} \approx 2 \cdot \frac{1-q}{\tan h_{SB}}$$
 (im Bogenmaß)

aus Taylorentwicklung für hohe h_{HB} , und dann näherungsweise Ersetzung durch h_{SB} im Argument des Tangens

mit jeweils
$$q = \frac{R + H_B}{R + H}$$



(für
$$R = 6371 \text{ km}$$
, $H = 10 \text{ km}$, $H_B = 0 \text{ km}$)